# 第 3 节 不等式的三角换元方法（★★★）

## 内容提要

三角换元法：涉及平方和或平方差为常数的求最值问题，可考虑三角换元法. 例如，若已知 $x^2+y^2=r^2$，则可令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，把求最值的式子化为关于 $\theta$ 的函数来分析；若已知 $x^2-y^2=r^2$，则可令 $\begin{cases}x=\dfrac{r}{\cos\theta}\\ y=r\tan\theta\end{cases}$. 在高考范畴内，一般平方和的三角换元比较常用，平方差的三角换元用得较少.

## 典型例题

【例题】已知 $b_1^2+b_2^2=5$，则 $3b_1+4b_2$ 的最大值为_____.

**解析：**条件涉及两项平方和，可考虑三角换元，

因为 $b_1^2+b_2^2=5$，所以可设 $\begin{cases}b_1=\sqrt{5}\cos\theta\\ b_2=\sqrt{5}\sin\theta\end{cases}$，则 $3b_1+4b_2=3\sqrt{5}\cos\theta+4\sqrt{5}\sin\theta=5\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)$，

故当 $\sin(\theta+\varphi)=1$ 时，$3b_1+4b_2$ 取得最大值 $5\sqrt{5}$.

**答案：**$5\sqrt{5}$.

【变式 1】已知 $x^2-2xy+2y^2=2$，则 $x^2+2y^2$ 的取值范围是_____.

**解析：**条件中没有直接给出平方和结构，但观察发现，可通过配方，凑出平方和，



由 $x^2-2xy+2y^2=2$ 可得 $(x-y)^2+y^2=2$，所以可设 $\begin{cases}x-y=\sqrt{2}\cos\theta\\ y=\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}$，则 $\begin{cases}x=\sqrt{2}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta\\ y=\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}$，

所以 $x^2+2y^2=(\sqrt{2}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta)^2+2\times(\sqrt{2}\sin\theta)^2=6\sin^2\theta+2\cos^2\theta+4\sin\theta\cos\theta$

$=2+4\sin^2\theta+2\sin2\theta=2+4\cdot\dfrac{1-\cos2\theta}{2}+2\sin2\theta=4+2\sin2\theta-2\cos2\theta=4+2\sqrt{2}\sin(2\theta-\dfrac{\pi}{4})$，

因为 $-1\le\sin(2\theta-\dfrac{\pi}{4})\le1$，所以 $4-2\sqrt{2}\le x^2+2y^2\le4+2\sqrt{2}$，故 $x^2+2y^2$ 的取值范围是 $[4-2\sqrt{2},4+2\sqrt{2}]$.

**答案：**$[4-2\sqrt{2},4+2\sqrt{2}]$.

【反思】有的等式虽然没有直接的平方和结构，但可通过配方化为平方和结构，也能用三角换元处理.

【变式 2】$\sqrt{x}+\sqrt{4-x}$ 的取值范围是_____.

**解析：**这题表面上看与平方和没什么关系，但观察发现 $(\sqrt{x})^2+(\sqrt{4-x})^2=4$，所以它其实隐藏了一个平方和为常数的条件，换元即可转化为我们熟悉的形式，

设 $a=\sqrt{x}$，$b=\sqrt{4-x}$，则 $a\ge0$，$b\ge0$，且 $a^2+b^2=4$，此时 $\sqrt{x}+\sqrt{4-x}=a+b$，

所以问题等价于在 $a^2+b^2=4(a\ge0,b\ge0)$ 的条件下，求 $a+b$ 的取值范围，可用三角换元，

设 $\begin{cases}a=2\cos\theta\\ b=2\sin\theta\end{cases}$，由于 $a\ge0$，$b\ge0$，所以不妨规定 $\theta\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，

此时$a+b=2\cos\theta+2\sin\theta=2\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$，因为$\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$，所以$\theta+\frac{\pi}{4}\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$，

从而$\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\in[\frac{\sqrt{2}}{2},1]$，故$a+b\in[2,2\sqrt{2}]$.

**答案：**$[2,2\sqrt{2}]$.

**强化训练**

1．（2022·黑龙江牡丹江模拟·★★）若$x^2+y^2=1$，则$3x-4y$的最大值是_____.

2．（2023·全国乙卷·★★★）已知实数$x$，$y$满足$x^2+y^2-4x-2y-4=0$，则$x-y$的最大值是（　　）

（A）$1+\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　（B）4　　（C）$1+3\sqrt{2}$　　（D）7

3．（2022·新高考Ⅱ卷·★★★★）（多选）若实数$x$，$y$满足$x^2+y^2-xy=1$，则（　　）



（A）$x+y\le1$　　（B）$x+y\ge-2$　　（C）$x^2+y^2\ge1$　　（D）$x^2+y^2\le2$